Title	On a monotone function and sharp triangle inequalities (Operator monotone functions and related topics)
Author(s)	佐野, 弘貴; 大和田, 智義
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1893: 5-12
Issue Date	2014-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/195830
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1893 巻 2014 年 5-12

On a monotone function and sharp triangle inequalities

静岡大学・理学研究科　佐野弘貴 (Hiroki Sano)
Graduate school of Science, Shizuoka University
静岡大学・教育　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University

1　序

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間としたとき, 三角不等式とは 2 個の元 $x_1, x_2 \in X$ に関するノルム不等式 $\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$ をいうが, ここでは, 特に区別する必要が無い限り, この一般化である n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に関する以下のノルム不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

を三角不等式と呼ぶことにする. 我々は近年, 以下の問題に精力的に取り組んできた.

問題 1.1　ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して,

(i) $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ をみたす正の値 C を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + D$ をみたす正の値 D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

ここでは, (i) を精密化された三角不等式とよび, (ii) をその逆不等式とよぶことにする.
問題 1.1 は以下の問題と同値である.

問題 1.2 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して,

$$0 \leqq C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq D$$

をみたす定数 C, D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

2005 年に加藤-斎藤-田村 [8] はバナッハ空間の幾何学的な性質の特徴づけに関連して, Hudzik-Landes の不等式 [5] を n 個の場合へ拡張するとともに, その逆不等式も与えた.

定理 1.3 ([8, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1\leqq i\leqq n} \|x_i\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1\leqq i\leqq n} \|x_i\|$$

この不等式の成功に誘発されて, その後様々な設定のもとで三角不等式の精密化の研究が進んでいる. (cf. [2,4,6,7,9,13]) その1つに, 三谷-斎藤- 加藤-田村 [11] があり, 彼らは定理 1.3 の不等式をより精密化することに成功した.

定理 1.4 ([11, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\|\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \\ &\leqq \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\|\sum_{i=n-(k-1)}^{n} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right) (\|x_{n-k}^*\| - \|x_{n-(k+1)}^*\|), \end{aligned}$$

ここで x_i^* は $\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, かつ $x_0^* = x_{n+1}^* = 0$ を満たす x_i の並べ替えである.

定理 1.3 および 定理 1.4 は問題 1.2 の 1 つの解を与えているが, それ以外の値は未解決のままであった. 峰野-中村- 大和田は 2012 年に, ノルムで与えられる連続関数を利用して三角不等式の差分 $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|$ と 0 との間の全ての値を特徴付けることに成功するとともに, その中間値として定理 1.3 および定理 1.4 の左側の不等式が得られることを示した. その後, Dehghan[3] は定理 1.3 および 定理 1.4 を含む不等式を与えたが, それらも実際には峰野-中村-大和田の与えた不等式に含まれている事が最近分かった.

これら, 新しい不等式の開発の一方で, その等号成立条件の考察も行われてきた. 加藤-斎藤-田村は [8] で定理 1.3 の等号成立条件も与えている. また, 定理 1.4 に関しては, 三谷-斎藤が [12] で論じている. ここでは, 峰野-中村-大和田の不等式の等号成立条件と, その系として Dehghan の不等式の等号成立条件についても紹介する.

2 単調関数と精密化された三角不等式について

この章では, 単調な連続関数を定義して, それを利用して精密化された三角不等式を考察する. バナッハ空間 $(X, \|\cdot\|)$ の元 $x_1, x_2 \in X$ をとり固定する. このとき, 任意の実数 $p, q \in [0, \infty)$ に対して

$$\tau_2(p, q) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \|px_1\| + \|qx_2\| - \|px_1 + qx_2\| \geq 0$$

により τ_2 を定義すれば τ_2 は $[0,\infty)\times[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ に値をとる連続関数であり, 任意の $s_1,s_2,t_1,t_2\in[0,\infty)$ に対して

$$\tau_2(s_1,s_2) \leq \tau_2(s_1,s_2)+\tau_2(t_1,t_2) \leq \tau_2(s_1+t_1,s_2+t_2)$$

を満たす. これより直ちに τ_2 は単調増加であることも分かり, 定理 1.3 の不等式はそれぞれ τ_2 を利用して次のように与えられる.

$$\begin{array}{llll} \text{(精密化)} & s_i+t_i=1,\ (i=1,2) & \Rightarrow & 0\leq\tau_2(s_1,s_2)\leq\tau_2(1,1) \\ \text{(逆不等式)} & s_1=s_2=1 & \Rightarrow & \tau_2(1,1)\leq\tau_2(1+t_1,1+t_2) \end{array}$$

すなわち

$$\begin{array}{llll} \text{(精密化)} & s_1,s_2\in[0,1] & \Rightarrow & 0\leq\tau_2(s_1,s_2)\leq\tau_2(1,1) \\ \text{(逆不等式)} & t_1,t_2\in[1,\infty) & \Rightarrow & \tau_2(1,1)\leq\tau_2(t_1,t_2) \end{array}$$

となる.

系 2.1 [10, Corollary 3] $x_1,x_2\in X$ とする. このとき, 任意の $s_1,s_2\in[0,1]$, $t_1,t_2\in[1,\infty)$ に対して以下の不等式が成立する.

$$0\leq\tau_2(s_1,s_2)\leq\tau_2(1,1)\leq\tau_2(t_1,t_2)$$

すなわち

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|s_1x_1\|+\|s_2x_2\|-\|s_1x_1+s_2x_2\| \\ &\leq \|x_1\|+\|x_2\|-\|x_1+x_2\| \\ &\leq \|t_1x_1\|+\|t_2x_2\|-\|t_1x_1+t_2x_2\| \end{aligned}$$

である.

系 2.1 を理解するために, 以下の図 1, および図 2 は有用である.

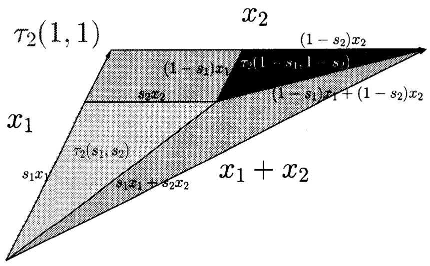

図 1: 精密化

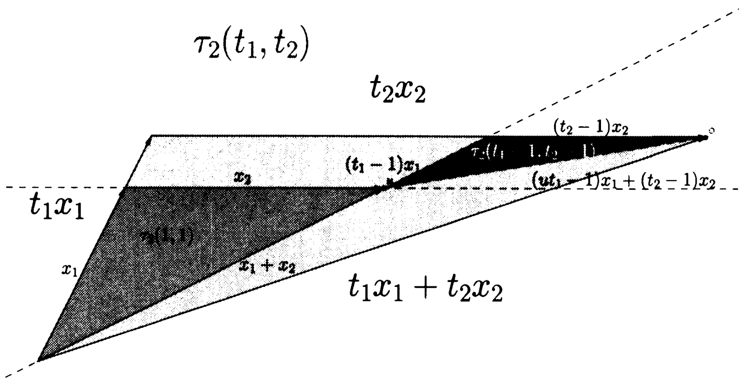

図 2: 逆不等式

3 個の元に関しても同様の考察が可能である.

定理 2.2 $x_1, x_2, x_3 \in X$ とする. このとき, 任意の $p, q, r \in \mathbb{R}$ に対して, τ_3 を $\tau_3(p,q,r) \stackrel{\text{def}}{=} \|px_1\| + \|qx_2\| + \|rx_3\| - \|px_1 + qx_2 + rx_3\|$ により与えれば, τ_3 は連続な単調増加関数であり $s_i + t_i \leq 1$ $(i = 1,2,3)$ であるような任意の $s_i, t_i \in [0,1]$ に対して以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} \tau_3(s_1,s_2,s_3) &\leq \tau_3(s_1,s_2,s_3) + \tau_3(t_1,t_2,t_3) \\ &\leq \tau_3(1,1,1) \end{aligned}$$

図 3 から定理 2.2 が成立することも, 明らかである.

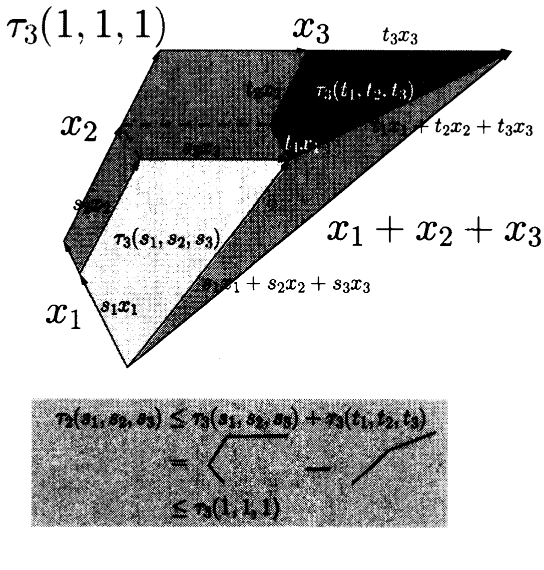

図 3: 精密化

次に n 個の元の場合を説明する．そのために，少し準備が必要である．正の整数 $n(\geqq 2)$ に対して，その要素全てが $[0,1]$ に含まれるような n 次正方行列全体を $M_n([0,1])$ とかき，$M_n([0,1])$ に含まれる下三角行列全体を L_n で表す．すなわち，

$$L_n = \left\{ a = (a_{ij}) \in M_n([0,1]) \,\middle|\, a_{ij} = 0 \quad (i < j) \right\}.$$

整数 m を $1 \leq m \leq n$ を満たすようにとる．このとき，任意の L_n の元 $a = (a_{ij})$ に対して，

$$\ell^a_{mj}(m) = a_{mj} \quad (1 \leq j \leq m)$$

とし，$2 \leq n$ のとき，任意の m $(2 \leq m \leq n)$ に対して

$$\ell^a_{ij}(m) = a_{ij} \prod_{k=i+1}^{m} (1 - a_{kj}) \quad (1 \leq i \leq m-1,\ 1 \leq j \leq m).$$

とする．このとき峰野-中村-大和田は次の不等式を示した．

定理 2.3 [10, Theorem 3.2] $n \geqq 2$ とし，L_n の任意の元 $a = (a_{ij})$ をとる．このときノルム空間 X の任意の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，次の不等式が成立する．

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \|\ell^a_{ij}(n) x_j\| - \left\| \sum_{j=1}^{i} \ell^a_{ij}(n) x_j \right\| \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \tag{1.1}$$

この結果も，ノルム空間 X の任意の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を固定したとき，連続な単調関数 τ_i を

$$\tau_i(s_1, s_2, \ldots, s_i) = \sum_{j=1}^{i} \|s_j x_j\| - \left\| \sum_{j=1}^{i} s_j x_j \right\| \quad (1 \leq i \leq n,\ s_j \in \mathbb{R})$$

により与えれば，不等式 (1.1) は以下のようになる．

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \tau_i(\ell^a_{i1}(n), \ell^a_{i2}(n), \ldots, \ell^a_{ii}(n)) \leq \tau_n(1, 1, \ldots, 1).$$

この不等式が成立することは，これまでの考察から容易に想像できるであろうが，[14] で我々はこの考察を具体化した，より明快な証明を与えている．

3　狭義凸バナッハ空間における等号成立条件について

この章では，不等式 (1.1) の等号成立条件を狭義凸バナッハ空間で考察する．一般のノルム空間で等号成立条件を考えることは困難であるが，狭義凸バナッハ空間においては以下の補題がそれを可能にする．

補題 3.1 (cf. [1, Problem 11.1]) $(X, \|\cdot\|)$ を狭義凸バナッハ空間とする．このとき X の任意の元 $x_1, \ldots, x_n$ に対して以下の条件は同値である．

(i) $\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$;

(ii) $\|x_j\|x_i = \|x_j\|x_i \quad (\forall i,j \in \{1,\cdots,n\})$.

我々は [14] で幾つかの場合に分けて, 不等式 (1.1) の等号成立条件を狭義凸バナッハ空間で論じているが, ここでは, 特に関心のある $a=(a_{ij}) \in L_n$ の対角成分が全て 1 である場合のみを紹介する.

定理 3.2 $n \geq 2$ とし L_n の元 $a=(a_{ij})$ をとる. このとき狭義凸バナッハ空間 X の 0 でない任意の元 $x_1,\ldots,x_n$ に対して, $a_{ij} \in [0,1)$ $(i>j)$ かつ $a_{ii}=1$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ であるなら, 等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\|\ell_{ij}^{a}(n)x_j\| - \left\|\sum_{j=1}^{i}\ell_{ij}^{a}(n)x_j\right\|\right) = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\| - \left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|$$

が成立することの必要十分条件は, ある実数 α_j $(j \in \{1,\ldots,n\})$ が存在して $x_j=\alpha_j x_1$ かつ $\sum_{j=1}^{i}\alpha_j \ell_{ij}^{a}(n) \geq 0$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ を満たすことである.

定理 1.3 および定理 1.4 に対応する L_n の元 $a=(a_{ij})$ は, 定理 3.2 の仮定を満たすことに注意する. 定理 3.2 の系として, 我々は直ちに以下を得ることができる.

系 3.3 [12, Theorem 3.7] 狭義凸バナッハ空間 X の 0 でない任意の元 $x_1,\ldots,x_n$ が $\|x_1\| > \|x_2\| > \ldots > \|x_n\|$ を満たすとき, 等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i - \left\|\sum_{j=1}^{i}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_i\| - \|x_{i+1}\|) = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\| - \left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|$$

が成立することの必要十分条件は, $1=\alpha_1 > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_n|$ となる実数 α_j $(j \in \{1,\ldots,n\})$ が存在して, $x_j=\alpha_j x_1$ $(j \in \{1,\ldots,n\})$ かつ $\sum_{j=1}^{i}\frac{\alpha_j}{|\alpha_j|} \geq 0$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ を満たすことである.

最後に Dehghan[3] が与えた不等式を紹介する. 彼は峰野- 中村-大和田の不等式とは独立に, 定理 1.3 および定理 1.4 を含む不等式として, 以下を示した.

定理 3.4 ([3, Theorem 2.1]) $x_1,x_2,\ldots,x_n$ をノルム空間 $(X,\|\cdot\|)$ の 0 でない元をとする. このとき, 実数 $p_i \geq 0$ と $q_i > 0$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ が $p_1/q_1 \geq \cdots \geq p_n/q_n$ を満たすなら, 次の不等式が成立する.

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}q_i\|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{k}q_i x_i\right\|\right) \leq \sum_{i=1}^{n}p_i\|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right\|,$$

ここで $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=0$ である.

我々は定理3.4も, 実は定理2.3に含まれることを示すと同時に, その等号成立条件も与えた.

系 3.5 [15, Corollary 3.3] $x_1, x_2, \dots, x_n$ を狭義凸バナッハ空間 $(X, \|\cdot\|)$ の0でない元とする. このとき, 実数 $p_i \geq 0$ と $q_i > 0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ が $p_1/q_1 \geq \cdots \geq p_n/q_n$ を満たすとき, 等式

$$\sum_{j=2}^{n} \left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} \right) \left(\sum_{i=1}^{j} q_i \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{j} q_i x_i \right\| \right) = \sum_{j=1}^{n} p_j \|x_j\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \right\|$$

が成立することの必要十分条件は, 実数 α_j $(j \in \{1, \dots, n\})$ が存在して, $x_j = \alpha_j x_1$ かつ $\sum_{j=1}^{i} \alpha_j q_j \geq 0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ を満たすことである. ここで $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 0$ とする.

参考文献

[1] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis, *Problems in operator theory. Graduate Studies in Mathematics*, 51. AMS, Providence, RI, (2002).

[2] A.H. Ansari and M.S. Moslehian, *More on reverse triangle inequality in inner products spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. (2005), no.18, 2883–2893.

[3] H. Dehghan, *Some new bounds for the generalized triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. **15** (2012), no. 4, 875–881.

[4] S.S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in inner product spaces*, Aust. J. Math. Anal. Appl. **1** no.2 (2004), 1–14.

[5] H. Hudzik and T.R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann. **294**(1992), 117–124.

[6] M. Fujii, M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp mean triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. **13** (2010), 743–752.

[7] C.-Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H.-J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **344**(2008), 17–31.

[8] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle Inequality and its reverse in Banach spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[9] M.S. Martirosyan and S.V. Samarchyan, *Inversion of the triangle inequality in* $\mathbb{R}^n$, **38**(2003), no.4, 65–72.

[10] K. Mineno, Y. Nakamura and T. Ohwada, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 15 (2012), no. 4, 1019–1035.

[11] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle Inequalities in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[12] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, *On sharp triangle Inequalities in Banach spaces II,* J. Inequal. Appl. (2010), Art. ID 323609, 17 pp.

[13] S. Saitoh *Generalizations of the triangle inequality,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4**(2003), no. 3, Article 62, 5 pp.

[14] H. Sano, T. Izumida, K.-I. Mitani, T. Ohwada and K.-S. Saito, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality II*, Cent. Eur. J. Math. **12**(5)(2014), 778–786.

[15] H. Sano, K. Mineno, Y. Nakamura, S. Nakamura C. Tamiya and T. Ohwada, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality III*, in preparation